

Capítulo 8

Materiales Magnéticos

8.1.	<u><i>Introducción</i></u>	8-2
8.2.	<u><i>Descripción microscópica de los materiales magnéticos</i></u>	8-2
	8.2.1. <u><i>Momento magnético y momento angular</i></u>	8-3
	8.2.2. <u><i>Momento angular y momento de espín</i></u>	8-4
8.3.	<u><i>Ecuaciones magnetostáticas en presencia de materiales magnéticos</i></u>	8-5
	8.3.1. <u><i>Corrientes de magnetización, corrientes reales y magnetización</i></u>	8-5
	8.3.2. <u><i>Teorema de Ampere generalizado</i></u>	8-7
	8.3.3. <u><i>Relación entre \vec{B}, \vec{H} y \vec{M} en materiales lineales</i></u>	8-8
	8.3.4. <u><i>Ecuaciones fundamentales de la Magnetostática en presencia de Materiales Magnéticos</i></u>	8-9
	8.3.5. <u><i>Clasificación de Materiales Magnéticos</i></u>	8-9
8.4.	<u><i>Ferromagnetismo - Ciclo de Histéresis</i></u>	8-10
	8.4.1. <u><i>Curva de Magnetización-Ciclo de Histéresis</i></u>	8-12
8.5.	<u><i>Condiciones de frontera o de borde</i></u>	8-14
8.6.	<u><i>Circuitos Magnéticos. Aproximación de flujo constante</i></u>	8-17
	8.6.1. <u><i>Ecuaciones fundamentales de los circuitos magnéticos</i></u>	8-17
	8.6.2. <u><i>Aproximación de flujo de \vec{B} constante</i></u>	8-18
	8.6.3. <u><i>Validez de la aproximación de flujo de \vec{B} constante</i></u>	8-19
8.7.	<u><i>Materiales lineales: Fuerza magnetomotriz y Reluctancia. Regla de Hopkinson</i></u>	8-21
8.8.	<u><i>Aplicaciones</i></u>	8-23
	8.8.1. <u><i>Toroide grueso</i></u>	8-23
	8.8.2. <u><i>Toroide delgado con entrehierro estrecho</i></u>	8-25
	8.8.3. <u><i>Circuito magnético delgado con entrehierro</i></u>	8-26
	8.8.4. <u><i>Toroide delgado con entrehierro estrecho y material magnético con ciclo de histéresis</i></u>	8-29
	<u><i>Bibliografía</i></u>	8-33

8.1. *Introducción*

La inclusión de los medios materiales en el estudio del magnetismo muestra resultados muy diferentes cuando se lo compara con los medios materiales en el estudio de la electrostática. Anteriormente se estudió cuál era el efecto que los campos eléctricos producían sobre los materiales (materiales eléctricos). Tratamos únicamente a los materiales dieléctricos y se observó que su efecto era siempre reducir el campo neto (generado por una determinada cantidad de carga eléctrica "libre"). En cambio, cuando nos ocupamos de los efectos de los campos magnéticos sobre los materiales, hablaremos de materiales magnéticos ya que su efecto puede ser alguno de los siguientes:

- 1) El campo \vec{B} se reduce un poco (materiales diamagnéticos).
- 2) El campo \vec{B} es un poco superior al correspondiente al vacío (materiales paramagnéticos).

En estos dos primeros casos el material presenta un comportamiento lineal. Además, en estos materiales, los efectos magnéticos son prácticamente despreciables por lo que para este curso, vamos a considerarlos, en general, como nulos. En otras palabras, los materiales diamagnéticos y los paramagnéticos serán considerados con las mismas propiedades que el vacío o el aire.

3) El campo \vec{B} aumenta mucho respecto del campo en vacío (materiales ferromagnéticos). En este caso el comportamiento del material es no lineal y sus propiedades dependen de la historia previa a la que fue sometida el material en estudio. Este tipo de comportamiento genera complicaciones. Como veremos en este capítulo, a pesar que el material ferromagnético es no lineal, en algunas situaciones vamos a poder aproximarlos como lineal. Por otro lado, es importante destacar que este tipo de materiales son los que tienen los efectos magnéticos más importantes y, por lo tanto, son nuestro objeto de estudio.

8.2 *Descripción microscópica de los materiales magnéticos*

¿Cuál es el origen microscópico de los efectos magnéticos de los materiales? Responder esta pregunta no es sencillo, una explicación completa de las diferentes tipos de comportamientos (diamagnetismo, paramagnetismo, ferromagnetismo, etc.) de los materiales magnéticos escapa a los conocimientos que se pueden adquirir en este curso. Para realizarla es necesario conocer la rama de la Física denominada Mecánica Cuántica. De todos modos, se

pretende a continuación explicar un modelo muy simplificado que nos dará una idea de los efectos magnéticos de los materiales.

8.2.1 Momento magnético y momento angular

Comencemos nuestro análisis con un modelo clásico del átomo en el que los electrones se mueven en órbitas circulares alrededor del núcleo, que tiene mucha más masa que un electrón (figura 8.1). En este modelo, un electrón orbitando constituye una pequeña espira de corriente (porque es una carga en movimiento) como muestra la figura 8.2. Pero como se mencionó previamente, toda espira cerrada con corriente tiene asociado un momento magnético (que lo podemos pensar como un imán) normal al plano de la misma. En otras palabras, una espira de corriente se comporta como un imán con sus polos Norte-Sur orientados en dirección normal al plano de movimiento. En este caso, el momento magnético \vec{m} (dipolo magnético) del electrón está asociado con este movimiento orbital de momento angular \vec{L} .

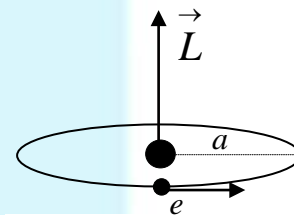


Figura 8.1 Modelo planetario de un átomo con un electrón en una órbita.

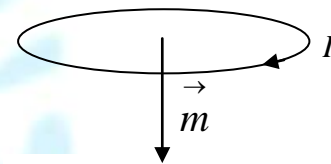


Figura 8.2 Movimiento orbital de un electrón visto como una espira de corriente.

En nuestro modelo clásico, suponemos que el electrón se mueve con velocidad \vec{v} (de módulo constante) en una órbita circular de radio a alrededor del núcleo, como en la figura 8.1. Debido a que el electrón viaja una distancia de $2\pi a$ en un intervalo de tiempo igual al período T , su velocidad orbital es $v = 2\pi a / T$. La corriente I asociada a este electrón orbitando es su carga e dividido por T , esto es:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi a} \quad (8.1)$$

Como se ha visto previamente (Sec 6.4), la magnitud del momento magnético asociado con esta espira de corriente es:

$$\vec{m} = I\pi a^2 \hat{n} = \frac{ev}{2} a \hat{n} \quad (8.2)$$

(con \hat{n} la normal al plano en el cual se realiza el movimiento del electrón)

Consecuentemente, si relacionamos (8.2) con el momento angular $\vec{L} = m_e v a \hat{n}$ podemos encontrar:

$$\vec{m} = \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{L} \quad (8.3)$$

Este simple modelo nos permite decir que el movimiento orbital del electrón, que lo pensamos como una espira de corriente, es lo que genera en primera aproximación el momento magnético del átomo (aunque existen otras contribuciones como veremos más adelante). Este \vec{m} del electrón, que lo relacionamos con el momento angular por medio de (8.3), es lo que da indicios del origen microscópico de los efectos magnéticos. En otras palabras, este modelo simplificado permite decir que la existencia de una partícula cargada (electrón) que orbita alrededor del núcleo y por lo tanto tiene un momento angular es el causante del comportamiento magnético del átomo.

En este modelo, el momento magnético del electrón interactúa con el campo magnético externo en el que se encuentra, actuando una cupla neta $\vec{T}_F = \vec{m} \times \vec{B}$ que tiende a alinearlo con el mismo.

8.2.2 Momento angular y momento de espín

En mecánica cuántica además del momento angular, existe también el denominado momento de espín, que si bien estrictamente no tiene una analogía en mecánica clásica, es común asociarlo con el giro del electrón sobre si mismo. En general, los campos creados por los materiales magnéticos surgen de dos fuentes atómicas: los momentos angulares orbitales y de espín de los electrones, que al estar en movimiento continuo en el material, experimentan fuerzas ante un campo magnético aplicado. Ambos momentos tienen asociados momentos magnéticos por relaciones similares a (8.3). Por lo tanto, las características magnéticas de un material pueden cambiar por aleación con otros elementos, donde se modifican por las interacciones atómicas. Por ejemplo, un material no magnético como el aluminio puede comportarse como un material magnético en materiales como AlNiCo (aluminio-níquel-cobalto) o manganeso-aluminio-carbono.

- Todo material está compuesto por átomos que contienen electrones móviles. Un campo magnético externo aplicado actúa siempre sobre los electrones considerados individualmente, como el modelo simple de la figura 8.1. Esto da origen al efecto universal llamado diamagnetismo. Este es un efecto clásico y depende solamente del movimiento de los electrones.

• A nivel atómico, la superposición de los momentos magnéticos (orbital, debido al movimiento del electrón alrededor del núcleo, e intrínseco o de espín) aportados por los electrones al átomo o molécula del cual forman parte da un momento magnético resultante o neto del átomo o molécula. Cuando hay un momento neto atómico o molecular los momentos magnéticos tienden a alinearse con el campo aplicado (o con los campos creados por momentos magnéticos vecinos), dado lugar al efecto del paramagnetismo. Simultáneamente, la energía térmica omnipresente tiende a orientar al azar a los momentos magnéticos, de manera que la intensidad relativa de todos estos efectos determinará en definitiva el comportamiento del material. En la figura 8.3 se esquematiza un material no magnetizado: los momentos magnéticos están orientados al azar.



Figura 8.3 Momentos magnéticos orientados al azar

8.3 Ecuaciones magnetostáticas en presencia de materiales magnéticos

8.3.1 Corrientes de magnetización y corrientes reales

Los materiales magnéticos están formados por muchísimos dipolos magnéticos permanentes o inducidos que se alinearán con el campo magnético exterior. Cada átomo del material tiene momento magnético que no es otra cosa que un imán elemental, pero que también se puede pensar como una pequeña espira por la que

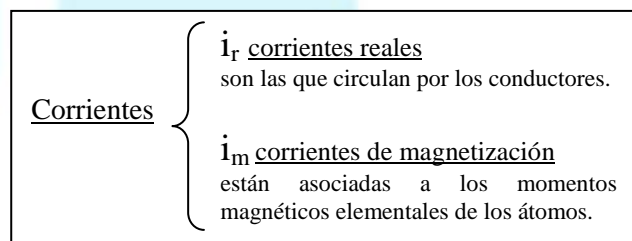


Figura 8.4 Clasificación de las corrientes

circula una corriente i tal como se explicó en las figuras 8.1 y 8.2. En este modelo simplificado, las corrientes asociadas a los momentos magnéticos elementales reciben el nombre de “corrientes de magnetización” y se las simboliza como i_m . Vamos a diferenciar a estas corrientes de magnetización, de las corrientes verdaderas que circulan por los conductores, a estas últimas las llamaremos corrientes reales y se las simboliza como i_r .

Definimos magnetización \vec{M} como un vector que da cuenta de la cantidad de momentos magnéticos elementales por unidad de volumen, esto es:

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta V} \tag{8.4}$$

Este vector es el análogo magnético al vector polarización de electrostática (\vec{P}); es distinto de cero únicamente en el interior de los materiales magnéticos y su unidad de medida en el SI es A/m.

A continuación analizaremos la relación entre la magnetización y las corrientes de magnetización. En realidad, lo que haremos es ver un caso muy sencillo y luego “aceptaremos” su generalización. Para ello tomemos un toroide de un material magnético, que se encuentra magnetizado con una magnetización uniforme, en la dirección azimutal, como muestra la figura 8.5.

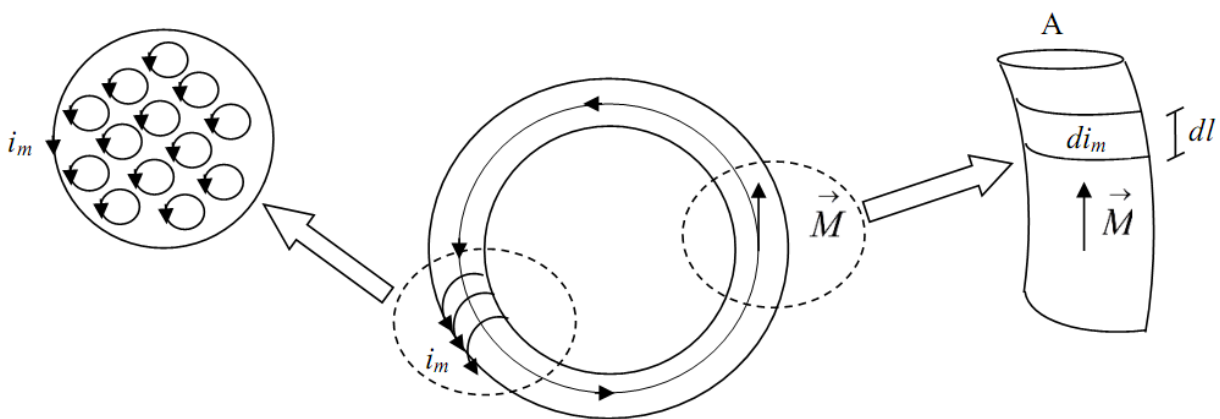


Figura 8.5 Toroide magnetizado de área A con magnetización uniforme \vec{M} . En el detalle de la izquierda se observa un corte del mismo, donde se indica el momento magnético elemental de cada átomo, como una pequeña espira. La superposición de los momentos magnéticos da una corriente de magnetización total i_m circulando por la superficie externa. A la derecha se observa una ampliación de una fracción del toroide, donde se indica, para un diferencial de longitud dl , la cantidad diferencial de corriente di_m que está circulando por el borde del toroide.

Sobre este toroide, debido a que se encuentra magnetizado, cada átomo se comporta como un momento magnético elemental o una pequeña espira (ver detalle izquierdo en figura 8.5). La superposición de los momentos magnéticos sobre el corte del toroide da una corriente de magnetización total neta i_m circulando exclusivamente por la superficie externa¹. Esta corriente está distribuida uniformemente a lo largo de toda la longitud del perímetro del

¹ Se puede demostrar que las densidades de corrientes de magnetización asociadas con una región con magnetización \vec{M} son:

- en el interior del material $\vec{J}_M = \text{rot}(\vec{M})$ y

- en el borde del material $\vec{K}_M = \hat{n} \times \vec{M}$ con \hat{n} la normal a la superficie.

En este caso particular, como \vec{M} es uniforme $\vec{J}_M = 0$ y $|\vec{K}_M| = \frac{di_m}{dl}$ es constante y tiene la dirección mostrada en la figura 8.5.

toroide, de tal manera que si tomamos un diferencial de longitud dl (en la dirección azimutal) está circulando una cantidad diferencial de corriente di_m a lo largo de la sección del toroide. Además, i_m es la corriente total que circula por el largo $2\pi r$ del toroide. De esta manera, usando (8.2) en (8.4):

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta V} = \frac{A di_m \hat{n}}{A dl} = \frac{di_m \hat{n}}{dl} \quad (8.5)$$

Pero

$$i_m = \int di_m \quad dl \rightarrow di_m \quad di_m = \frac{i_m dl}{2\pi r}$$

Entonces:

$$\vec{M} = \frac{di_m \hat{n}}{dl} = \frac{i_m \hat{n}}{2\pi r} \quad (8.6)$$

$$i_m = M 2\pi r = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \quad (8.7)$$

La ecuación (8.7) nos muestra que **el vector magnetización es generado exclusivamente por la corriente de magnetización.**

8.3.2 Teorema de Ampere generalizado

En general, cuando se quiere determinar el campo magnético \vec{B} se deberían conocer tanto las corrientes reales como las de magnetización y, en ese caso, este campo se podrá determinar usando el teorema de Ampere, esto es:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_r + i_m) \quad (8.8)$$

Pero habitualmente las corrientes de magnetización son desconocidas. Esto nos lleva a hacer un tratamiento similar al hecho con materiales dieléctricos (capítulo 3, sección 3.3), determinando un campo vectorial de origen magnético, que sea exclusivamente generado por las corrientes reales. Esto es, usando (8.7) en (8.8):

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(i_r + \oint_c \vec{M} \cdot d\vec{l} \right) \quad (8.9)$$

Así:

$$\oint_c \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.10)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.11)$$

con

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (8.12)$$

El **campo magnético** \vec{B} se denomina vector inducción magnética o densidad de flujo magnético y se mide en T. El campo \vec{H} se denomina **intensidad de campo magnético** y se mide en A/m.

La ecuación (8.11) se denomina teorema de Ampere generalizado, que en situaciones de determinadas simetrías, permite obtener este nuevo campo \vec{H} que es generado exclusivamente por las corrientes reales.

8.3.3 Relación entre \vec{B} , \vec{H} y \vec{M} en materiales lineales

A partir de la ley de Ampere generalizada (ec 8.11) se observa que el campo \vec{H} es generado por las corrientes reales. Cuanto mayor sean éstas, es de esperar que mayor sea la magnetización del material. En otras palabras, cuanto mayor sea el campo externo al material, mayor será el grado de magnetización. Por lo tanto, se propone una relación lineal entre \vec{M} y \vec{H} para los denominados materiales lineales isótropos y homogéneos (L.I.H.), esto es:

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (8.13)$$

donde χ es la denominada la susceptibilidad magnética y es una propiedad intrínseca adimensional del material.

De (8.12) obtenemos \vec{B} (vector inducción magnética):

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0 \cdot (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \cdot \mu_r \vec{H} \quad (8.14)$$

En (8.14) $\mu_r = 1 + \chi$ es la permeabilidad relativa del material.

Escribimos el último miembro de (8.14) como:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (8.15)$$

En (8.15) $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ es la permeabilidad absoluta del material magnético, cuyas unidades en el SI son Tm/A.

Las relaciones $\vec{M} = \chi \vec{H}$ y $\vec{B} = \mu \vec{H}$ son equivalentes y se denominan relación constitutiva del material L.I.H..

La aplicación conjunta de las ecuaciones (8.11) y (8.15), esto es la ecuación generalizada de Ampere y la relación constitutiva, es la base que nos ayuda a obtener el vector inducción magnética \vec{B} en el caso de los materiales magnéticos L.I.H.

8.3.4 Ecuaciones fundamentales de la Magnetostática en presencia de Materiales Magnéticos

Las ecuaciones fundamentales de la magnetostática en presencia de materiales magnéticos son las relaciones asociadas con la divergencia y el rotor de los campos magnéticos, que en sus versiones integrales son el teorema de Ampere generalizado (Ec (8.11)) y la ecuación de inexistencia de monopolos magnéticos (ya vista previamente), éstas son:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.16)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.17)$$

La ecuación (8.17) es la ecuación que indica que experimentalmente nunca se encontraron monopolos magnéticos aislados, los polos magnéticos siempre son encontrados de a pares en una configuración dipolar.

Las versiones en derivadas parciales de estas expresiones son:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}_r \quad (8.18)$$

donde \vec{J}_r es la densidad de corriente real.

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (8.19)$$

8.3.5 Clasificación de Materiales Magnéticos

Como se mencionó en la introducción los materiales magnéticos se dividen en tres grandes grupos: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. En los primeros dos grupos se verifican las relaciones lineales dadas por las ecuaciones (8.13) y (8.15), aunque los efectos magnéticos son prácticamente despreciables:

Diamagnéticos: la susceptibilidad magnética χ es negativa y en módulo es mucho menor que 1; los valores típicos van desde -10^{-5} hasta unas decenas de -10^{-5} . La magnetización es del orden 100.000 veces más chica que el campo \vec{H} y en dirección contraria al mismo. Son materiales diamagnéticos: plata, plomo, cobre, mercurio, bismuto,

etc. La permeabilidad μ es prácticamente la del vacío, aunque levemente menor. Los campos \vec{B} y \vec{H} presentan la misma dirección y sentido.

Paramagnéticos: la susceptibilidad magnética χ es positiva pero mucho menor que 1; los valores típicos van desde 10^{-5} hasta unas decenas de 10^{-5} . La magnetización es del orden 100.000 veces más chica que el campo \vec{H} y en la misma dirección. Son materiales paramagnéticos: aluminio, sodio, platino, uranio, etc. La permeabilidad μ es prácticamente la del vacío, aunque levemente mayor. Los campos \vec{B} y \vec{H} presentan la misma dirección y sentido.

El tercer grupo, los materiales ferromagnéticos, tienen efectos magnéticos muy apreciables, pero con una complicación, las relaciones lineales (8.13) y (8.15) dejan de valer:

Ferromagnéticos: Debido a que las relaciones lineales en Física simplifican los cálculos, y a pesar que estos materiales son no lineales, vamos a seguir utilizando las ecuaciones (8.13) y (8.15) imponiendo que las constantes de proporcionalidad χ y μ , respectivamente, son funciones del vector intensidad campo magnético \vec{H} y de la historia previa del material, y vamos a hablar de valores equivalentes de la susceptibilidad magnética χ y de la permeabilidad μ . En esta situación, la susceptibilidad magnética "equivalente" χ_{eq} es positiva y puede tomar valores muy altos del orden de decenas de mil. En estos casos la magnetización es muy alta, decenas de miles de veces mayor al campo \vec{H} . Este efecto se observa en unos pocos elementos y estos materiales son el verdadero interés de estudio de este curso. Son los llamados materiales ferromagnéticos. Son ejemplos de ellos: hierro, níquel, cobalto, etc.

8.4 Ferromagnetismo - Ciclo de Histéresis

Otra de las propiedades características de los materiales ferromagnéticos, además de su muy elevada susceptibilidad magnética "equivalente" ($\chi_{eq} \gg 1$), es la posibilidad de tener una magnetización residual, esto es una magnetización no nula para un campo magnético externo igual a cero ($\vec{M} \neq 0$ con $\vec{H} = 0$), característica ésta que no presentan los materiales lineales (diamagnéticos y paramagnéticos).

Si bien no existe una teoría clásica que pueda explicar este fenómeno en su totalidad, muchas de las propiedades observadas pueden ser entendidas a partir del Modelo de Weiss (1907). Este modelo propone, entre otras cosas, la existencia de dominios, definidos como

grupos de átomos o moléculas dentro de los cuales los momentos magnéticos se mantienen alineados entre sí debido a un fuerte acoplamiento, aún en ausencia de campo exterior. El origen de la formación dominios es minimizar la energía magnética (ver representación esquemática en Figura 8.6). Al igual que los momentos individuales, en ausencia de campo aplicado, los dominios tienen sus momentos magnéticos netos (esto es el momento magnético del dominio) distribuidos al azar, es decir, la dirección de la magnetización varía entre un dominio y otro (algo análogo a lo mostrado en la Figura 8.3. para momentos individuales).

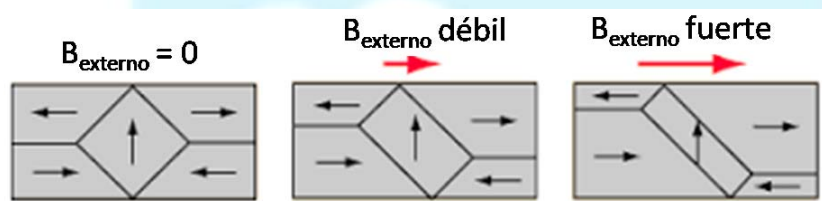


Figura 8.6 Esquema de dominios magnéticos para distintas situaciones de campos externos aplicados.

Cuando se aplica un campo exterior, los dominios tienden a alinearse con el campo. En algunos casos el acoplamiento es tan fuerte que el alineamiento perdura aún al retirar el campo, lo que explica la existencia de magnetización residual.

La agitación térmica tiende a desalinear los dominios. Por encima de una cierta temperatura, llamada temperatura de Curie (T_C), el material ferromagnético sufre una transición y se vuelve paramagnético, debido a que los efectos térmicos de desorden son mayores que los efectos de alineamiento de la interacción magnética entre dominios. Una forma de desmagnetizar un material ferromagnético es entonces calentarlo por encima de esta temperatura. La temperatura de Curie caracteriza a cada material y en la Tabla 1 se presentan los valores de T_C de algunos materiales ferromagnéticos. Se puede observar que estas temperaturas son en algunos casos muy altas y cercanas a las temperaturas de fusión del elemento, por lo que en la práctica la desmagnetización por temperatura es, en general, un proceso parcial.

Tabla 1. Temperatura de Curie de algunos elementos

Material	T_C (K)
Co (cobalto)	1388
Fe (hierro)	1043
Ni (níquel)	627
Gd (gadolinio)	293
Dy (disprosio)	85

La habilidad de un material magnético para soportar, sin cambios en sus propiedades, diversos tipos de ambientes y condiciones de trabajo define los tipos de aplicaciones en que se lo puede usar. Según este criterio se suele clasificar a los materiales magnéticos según:

✓ Los materiales que pierden su magnetización cuando se retira el campo exterior que la produjo se llaman materiales magnéticos **blandos**. Estos materiales son útiles para concentrar o conformar campos magnéticos. Se utilizan para fabricar transformadores.

✓ Aquellos materiales que mantienen la magnetización al quitar el campo aplicado se denominan **duros**. Se utilizan para la fabricación de imanes permanentes.

Suele llamarse imán a cualquier objeto que produce un campo magnético. Un imán permanente es un material que, cuando se lo coloca en un campo magnético suficientemente intenso, se magnetiza, quedando con magnetización remanente aún después de ser retirado el campo aplicado. Esta propiedad no se altera ni se debilita mayormente con el tiempo salvo cuando el imán se somete a cambios de temperatura, campos desmagnetizantes, tensiones mecánicas, etc.

8.4.1 Curva de Magnetización-Ciclo de Histéresis

En los materiales ferromagnéticos la relación entre la magnetización y el campo externo aplicado no es única sino que depende de la historia previa del material, este fenómeno se denomina histéresis. La representación gráfica de la magnetización en función del campo aplicado se denomina ciclo o curva de histéresis. Una curva típica se muestra en la figura 8.7.

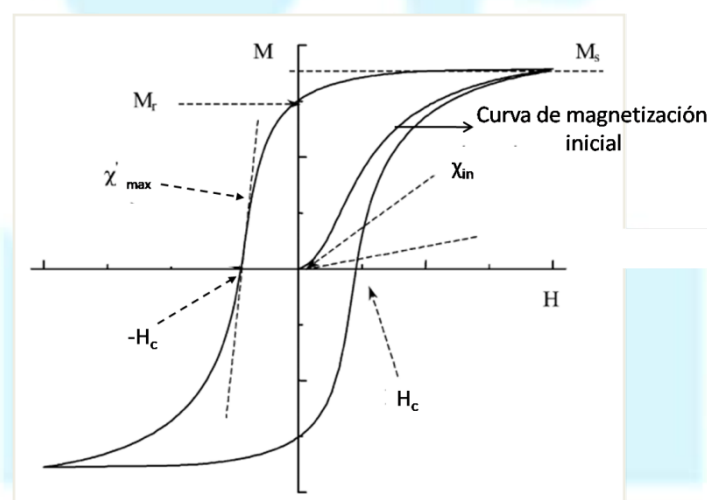


Figura 8.7 Curva de histéresis típica en la que se señalan algunos valores de interés.

Si se parte de un estado desmagnetizado (origen de coordenadas en el gráfico), a medida que el campo externo \vec{H} aumenta el material aumenta su magnetización siguiendo lo que se conoce como curva de magnetización inicial. Este incremento se da mediante la rotación y coalescencia (unión) de los dominios magnéticos. Este proceso tiene lugar hasta que todos los dominios del material se encuentran alineados con el campo externo aplicado, momento en el cual la magnetización alcanza su valor de saturación (M_s : magnetización de saturación). Si, desde este punto de saturación, se disminuye la intensidad de \vec{H} se observa que la curva no vuelve por la trayectoria anterior sino que sigue un camino distinto. Esto sucede porque los mecanismos que gobiernan el proceso de magnetización del material son fuertemente no lineales. Una vez que el campo externo llega a cero el material queda magnetizado con un valor llamado magnetización remanente o de remanencia (M_r). El material quedará desmagnetizado al llegar al valor $-H_c$ (campo coercitivo). Si se continúa aumentando en valores negativos el valor del campo externo se llega a una nueva saturación, esta vez con el sentido opuesto a la anterior. A partir de allí el ciclo de completa de manera simétrica.

Por otra parte, como la relación entre \vec{M} y \vec{H} no es lineal en estos materiales, la susceptibilidad (χ) no es una constante sino que depende del valor de \vec{H} . En la figura 8.7 se muestran los valores de χ_{in} (susceptibilidad inicial) y χ_{max} (susceptibilidad máxima) considerados como la pendiente de la recta tangente en los puntos correspondientes.

Una representación análoga a la mostrada en la figura 8.7 puede hacer para \vec{B} vs \vec{H} . En ese caso \vec{B} no satura sino que continúa aumentando ligeramente a medida que aumenta \vec{H} , es decir, para campos externos grandes \vec{B} se vuelve lineal con \vec{H} ya que \vec{M} deja de aumentar (satura).

Entonces, para los materiales ferromagnéticos **no podemos escribir una relación funcional** entre \vec{M} y \vec{H} (o entre \vec{B} y \vec{H}) ya que los valores dependen fuertemente de la historia (magnética) previa del material. Además, las curvas de histéresis son distintas para diferentes materiales. Dependen de la composición química del material pero también de las características de su preparación.

Sin embargo, a pesar que estos materiales son no lineales, resulta de gran simplicidad poder seguir utilizando las ecuaciones (8.13) y (8.15). La utilización de estas ecuaciones sirve para resolver los problemas de materiales magnéticos en forma más simple. Esto se logra,

imponiendo que las constantes de proporcionalidad χ y μ son ahora funciones del vector intensidad campo magnético \vec{H} y de la historia previa del material, y vamos a hablar de valores equivalentes de la susceptibilidad magnética χ y de la permeabilidad μ . En otras palabras, reescribimos las ecuaciones (8.13) y (8.15) de la siguiente manera:

$$\vec{M} = \chi_{(H, \text{historia})} \vec{H} \quad (8.13 \text{ bis})$$

$$\vec{B} = \mu_{(H, \text{historia})} \vec{H} \quad (8.15 \text{ bis})$$

O sea, para una determinada situación física, donde se conoce el rango de valores de \vec{H} y la historia previa del material, se podrá conocer el valor equivalente de la susceptibilidad y de la permeabilidad (para ese rango de valores de \vec{H}) y en este caso se usarán las ecuaciones constitutivas (8.13) y (8.15). Resulta claro que si se cambia el valor de la intensidad de campo magnético \vec{H} , la susceptibilidad y la permeabilidad cambiarán. De la misma manera, hablaremos de valores equivalentes para la permeabilidad relativa.

8.5 Condiciones de frontera o de borde

En este apartado vamos a establecer las condiciones que satisfacen \vec{H} y \vec{B} en la superficie de separación de dos medios con propiedades magnéticas diferentes. El desarrollo será análogo al que se hizo para encontrar las condiciones de borde de \vec{E} y \vec{D} (Capítulo 3, sección 3.4).

Supongamos que tenemos dos medios magnéticos de permeabilidades μ_1 y μ_2 , tal que en la interfaz hay una corriente superficial dada por \vec{K}_r .

Partimos de la ec. (8.17), como superficie cerrada de integración tomamos un cilindro de altura h mucho menor que su radio R , es decir, $h \rightarrow 0$ más rápidamente que su radio (ver figura 8.8). Entonces,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{A_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{A_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{Sup lateral}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (8.20)$$

Como estamos considerando un cilindro cuya altura h tiende a cero, es decir, un “volumen” infinitesimal alrededor de la interfaz, podremos considerar que el campo a cada lado de la interfaz es uniforme. Supongamos que vale \vec{B}_1 (con cualquier dirección y sentido) por encima de la interfaz, \vec{B}_2 (con cualquier dirección y sentido) debajo de la interfaz y en la superficie

lateral tendrá otro valor \vec{B}_{lat} (con cualquier dirección y sentido). Consecuentemente, la ecuación (8.20) puede escribirse según,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{A_1} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \iint_{A_2} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{-h/2}^{h/2} \vec{B}_{lat} \cdot \vec{e}_\rho 2\pi R dh = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 + \vec{B}_{lat} \cdot \vec{e}_\rho 2\pi R h \quad (8.21)$$

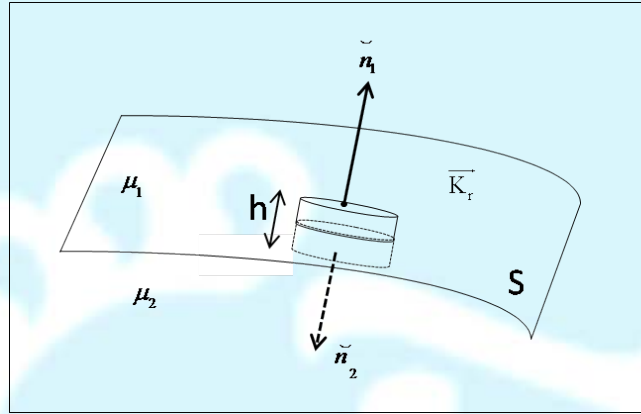


Figura 8.8 Superficie de separación de dos medios con permeabilidades distintas. Esquema utilizado para la obtención de la condición de borde de la componente normal.

En las condiciones que estamos considerando, i.e. $h \rightarrow 0$, el término asociado con la superficie lateral tenderá a cero. Resulta, entonces,

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 \pi R^2 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2 \pi R^2 = (\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 \quad (8.22)$$

En consecuencia,
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = (\vec{B}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_2) \pi R^2 = 0 \quad (8.23)$$

Como $-\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \equiv \vec{n}$, resulta

$$\begin{aligned} (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} &= 0 \\ B_{2normal} &= B_{1normal} \end{aligned} \quad (8.24)$$

Esta última ecuación nos dice que la componente normal del campo de inducción magnética \vec{B} se conserva.

En particular, para el caso que estamos considerando medio isótropos, lineales y homogéneos $\vec{B} = \mu \vec{H}$, de donde resulta:

$$\mu_1 H_{1normal} = \mu_2 H_{2normal}.$$

Una observación interesante que podemos hacer llegado este punto es que, si \vec{B} sólo tiene componente normal, entonces valdrá lo mismo a un lado y a otro de la interfaz, esto es $B_1 = B_2$. Sin embargo, \vec{H} (que también tendrá sólo componente normal para el caso de

medios L.I.H.) no tendrá el mismo valor a ambos lados por tratarse de dos medios con permeabilidades distintas, sino que $\mu_1 H_1 = \mu_2 H_2$.

Ahora veamos si podemos determinar alguna otra propiedad, pero esta vez a partir de la ecuación para el rotor del campo \vec{H} (ec. 8.18). Tomemos una curva cerrada como la de la figura 8.9, donde “la altura” h tiende a cero más rápidamente que las longitudes de la curva “paralelas” a la interfaz.

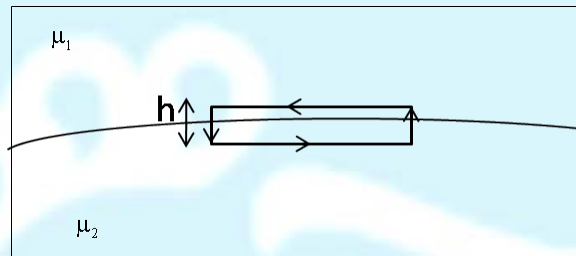


Figura 8.9 Superficie de separación de dos medios con permeabilidades distintas. Esquema utilizado para la obtención de la condición de borde de la componente tangencial.

Calculemos la circulación del campo magnético

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{l_4} \vec{H}_4 \cdot d\vec{l}_4 \quad (8.25)$$

Como los lados de longitud h tienden a cero, las dos integrales sobre esos lados son despreciables frente a las otras dos restantes, es decir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l}_3 + \int_{l_4} \vec{H}_4 \cdot d\vec{l}_4 \cong \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 \quad (8.26)$$

Como solamente nos quedan las componentes tangenciales a la superficie evaluadas “en la superficie” tendremos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} \cong \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = H_{1,tangencial} l_1 - H_{2,tangencial} l_1 = K_r l_1 \quad (8.27)$$

Por lo tanto,

$$\vec{H}_{2,tangencial} - \vec{H}_{1,tangencial} = K_r \quad (8.28)$$

lo que significa que la componente tangencial del campo magnético en condiciones magnetostáticas cambia en una interfaz si hay corrientes superficiales reales ($\vec{K}_r \neq 0$).

Las condiciones de borde o frontera que se enuncian en las ecs. (8.24) y (8.28) son válidas para cualquier material magnético.

8.6 Circuitos Magnéticos. Aproximación de flujo constante

Un circuito magnético es una región cerrada del espacio donde hay concentración de líneas de campo magnético. Habitualmente, las regiones de materiales ferromagnéticos concentran las líneas de campo magnético, por lo tanto, los circuitos magnéticos están formados por una sucesión de materiales ferromagnéticos que forman un camino cerrado, aunque también se puede agregar una región con vacío (o aire) de pequeña extensión, denominada habitualmente entrehierro. El circuito magnético más sencillo es el anillo de Rowland, que se muestra en la figura 8.10. Como se ve en la figura, existe un devanado primario de N vueltas, supuestamente distribuidas en forma uniforme cubriendo todo el anillo, por las que circula una corriente I .

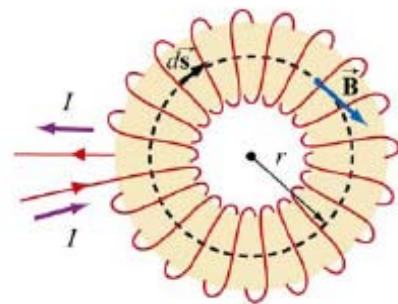


Figura 8.10 Anillo de Rowland

En la figura 8.11 vemos otro circuito magnético construido con un material ferromagnético de permeabilidad “equivalente” μ , de sección rectangular S alimentado por N espiras por la que circula una corriente I .

8.6.1 Ecuaciones fundamentales de los circuitos magnéticos

Las relaciones que rigen el comportamiento de los campos en los circuitos magnéticos son el juego de ecuaciones (8.16) y (8.17) o sea, la ley de Ampere generalizada y la ley de inexistencia de monopolos magnéticos, esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (8.29)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.30)$$

La segunda de estas ecuaciones también nos indica que las líneas de \vec{B} son cerradas y vamos a demostrar a continuación que, debido a la presencia de materiales ferromagnéticos, en el

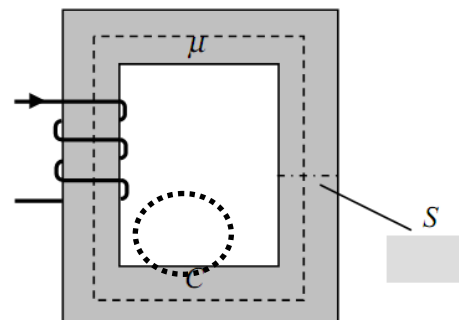


Figura 8.11 Circuito magnético simple de sección rectangular. En el círculo punteado se muestra la región donde se aplicarán las condiciones de frontera.

interior del circuito magnético se concentra la mayor cantidad de líneas. Se verá que la ecuación (8.30) se puede escribir diciendo que el flujo del vector inducción magnética es constante en el interior del circuito.

8.6.2 Aproximación de flujo de \vec{B} constante.

Consideramos la región circular de la figura 8.11 para aplicar las condiciones de borde, el detalle puede verse en la figura 8.12. Se observa que los campos son tangentes a la superficie de separación material ferromagnético – aire y se desea comparar los campos en cada región material. Para ello usamos la ecuación (8.28):

$$H_{tM} - H_{t0} = K_r \quad (8.31)$$

Pero no tenemos corriente reales en la superficie de separación material ferromagnético – aire, por lo tanto:

$$H_{tM} = H_{t0} \quad (8.32)$$

Asumiendo que el material ferromagnético puede aproximarse por un material magnético de permeabilidad μ_M conocida y usando la relación constitutiva tenemos:

$$\frac{B_M}{\mu_M} = \frac{B_0}{\mu_0} \quad (8.33)$$

Pero, en general en los materiales ferromagnéticos: $\mu_M \gg \mu_0$ y esto significa $B_0 \ll B_M$, o en otras palabras $B_0 \approx 0$.

Por lo tanto, si consideramos que en el exterior al circuito magnético el campo es aproximadamente nulo, esto significa que las líneas de \vec{B} quedan confinadas al interior del circuito magnético y siguen la forma geométrica del circuito.

Esta condición se puede escribir en función del flujo a partir de la ecuación (8.30). Consideremos una porción de circuito magnético como el mostrado en la figura 8.13, donde todas las líneas de \vec{B} están confinadas al interior del circuito. Consideremos la ecuación (8.30) con una superficie cerrada S formada por las “tapas” S_1 y S_2 y la superficie lateral del circuito.

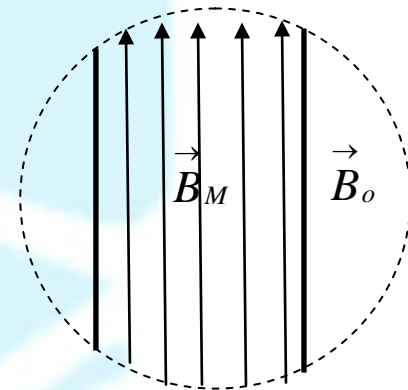


Figura 8.12 Condición de borde en un circuito magnético. Ampliación de la zona punteada en fig 8.11.

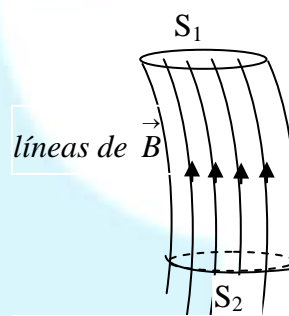


Figura 8.13 Fracción de un circuito magnético. Las líneas de B quedan confinadas en el interior.

Teniendo en cuenta que el flujo de \vec{B} sobre la superficie lateral es nulo, ya que en primera aproximación ninguna línea de \vec{B} la atraviesa, se puede obtener que el flujo sobre las superficies abiertas S_1 y S_2 es el mismo para que sea válida la ecuación (8.30). Esto lo podemos escribir como:

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (8.34)$$

Resumiendo, las ecuaciones fundamentales de los circuitos magnéticos son (8.29) y (8.34).

8.6.3 Validez de la aproximación de flujo de \vec{B} constante.

La expresión (8.34) es válida siempre y cuando se pueda decir que las líneas de campo quedan confinadas al interior del circuito, o lo que es lo mismo que el campo es nulo en el exterior. Esta aproximación se verifica bastante bien para ciertas condiciones que son: a) geometrías simples para los circuitos, sin vértices ni bordes cortados y b) permeabilidad del material mucho más grande que la permeabilidad del vacío (cuando más grande sea la diferencia mejor será la aproximación). Si uno quiere saber qué tan buena es esta aproximación, o sea si se desea apreciar los efectos de “pérdida” de flujo por la superficie lateral, se pueden realizar simulaciones numéricas usando diferentes programas.

En las siguientes figuras 8.14a y 8.14b se muestran los resultados de las simulaciones para el circuito magnético de la figura 8.11. Este es un circuito magnético construido con un material ferromagnético considerado en una zona de trabajo tal que la permeabilidad relativa “equivalente” μ_{req} es 1000, de sección rectangular S , alimentado por N espiras por las que circula una corriente I . Es interesante notar que:

- 1) El vector inducción magnética o densidad de flujo magnético \vec{B} queda mayormente confinado en el interior del circuito.

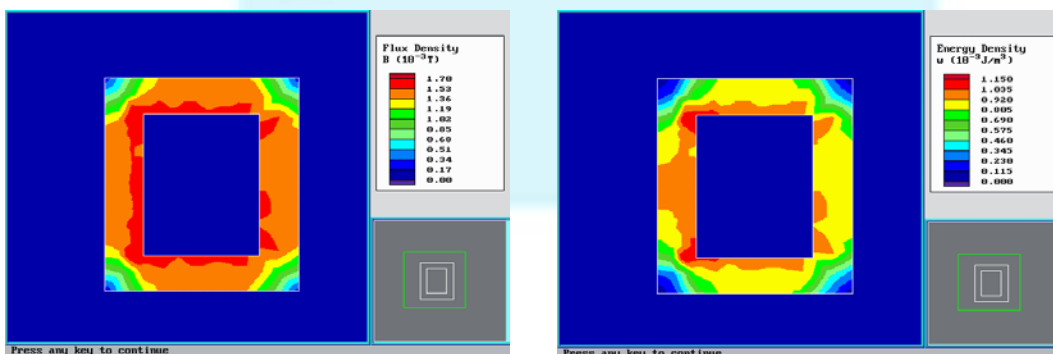


Figura 8.14a Simulación numérica del circuito de la figura 8.11. A la izquierda valores de \vec{B} , a la derecha la densidad de energía.

2) Tanto el campo \vec{B} como la densidad de energía son un poco mayores en la zona donde se encuentra la corriente (lado izquierdo del circuito) que en la zona derecha del mismo. Esto nos muestra que la ecuación de flujo constante es una aproximación.

En la figura 8.14b se muestran los resultados para el campo \vec{H} . Se observan grandes valores de H en el exterior del circuito, cerca de las corrientes reales.

En la figura 8.15, se muestra una variante del circuito magnético mostrado en figura 8.11. En este circuito se agrega un entrehierro estrecho de largo “e” (que es mucho menor que el lado de la sección del toroide). En esta figura se observan valores muy intensos del campo \vec{H} en la región del entrehierro y una dispersión de líneas de campo magnético \vec{H} fuera de esta región.

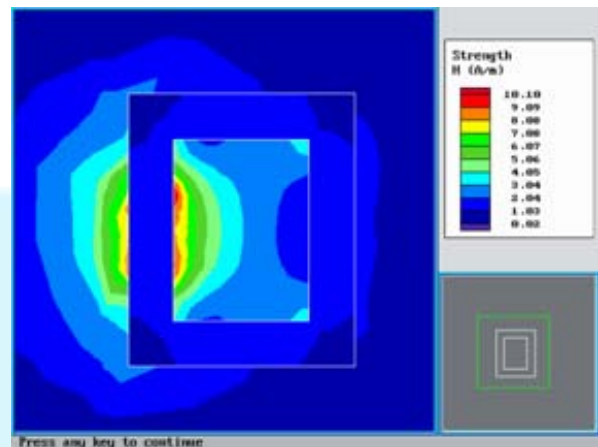


Figura 8.14 b Simulación numérica del circuito de la figura 8.11. Valores del campo H

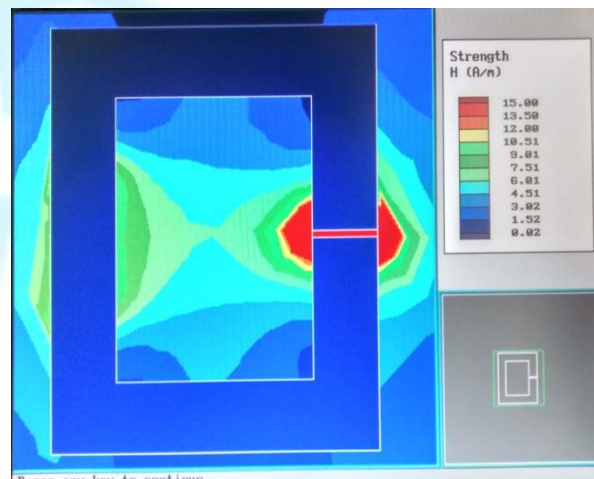


Figura 8.15 Circuito de la figura 8.11 con el agregado de un entrehierro. Valores del campo H.

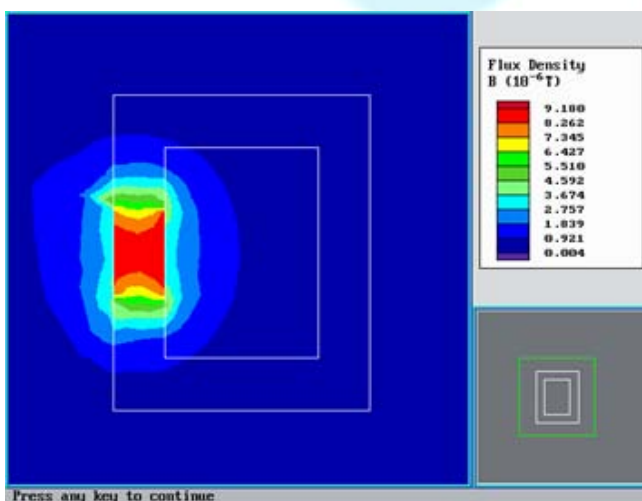


Figura 8.16 Simulación numérica del circuito de la figura 8.11 en el caso extremo donde la permeabilidad del material es la del vacío.

Por último, en la figura 8.16, se muestra la simulación numérica en el caso extremo en el que no hay circuito magnético (o sea que el arrollamiento de espiras está hecho sobre vacío). Vemos valores muy intensos de \vec{B} en la región donde se encuentran las corrientes reales, como si fuera un solenoide corto. Esta última simulación nos muestra que para

que las líneas de \vec{B} sigan la forma de los circuitos deben estar formados por materiales ferromagnéticos.

8.7 Materiales lineales: Fuerza magnetomotriz y Reluctancia. Regla de Hopkinson

Aquí desarrollaremos una analogía con circuitos eléctricos que se basa en dos suposiciones principales:

- a) El material ferromagnético puede caracterizarse por su permeabilidad magnética “equivalente” $\mu_{(H, historia)}$ que llamaremos aquí μ sencillamente. O sea que es válida la relación constitutiva lineal dada por la ecuación (8.15).
- b) El campo \vec{B} es uniforme en cada región de material magnético. Esta hipótesis es válida cuando la sección del circuito es pequeña (ver ejemplo 8.8.1 para entender la validez de la misma). Permite determinar el flujo del campo como el producto del módulo del campo \vec{B} por el área.

Vimos que las líneas de \vec{B} son cerradas. Aunque no haya nada que fluya a través de estas líneas se puede establecer una analogía entre las líneas de \vec{B} y las líneas de corriente en un circuito conductor. En un circuito eléctrico en serie, la corriente que pasa por todas las secciones es la misma. En el caso de un circuito magnético la cantidad de flujo transversal que pasa es la misma. Se define “fuerza magnetomotriz” (*fmm*) a la circulación del campo intensidad de campo magnético \vec{H} , es decir

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = fmm = NI ; \quad [fmm] = \text{Ampere} \times \text{vuelta} \quad (8.35)$$

Supongamos que tenemos una sucesión de materiales magnéticos de manera tal que “se cierre” formando un “circuito cerrado”, por ejemplo el mostrado en la figura 8.17. Este circuito está formado por dos materiales ferromagnéticos diferentes uno denominado “núcleo” (N) y otro llamado “barra” (B) que cierran el circuito con dos entrehierros “estrechos” (e_1 y e_2 , cuyos largos son mucho menores que el lado de la sección del circuito). Además está alimentado por un arrollamiento de N espiras por el que circula una corriente I.

Consideremos las siguientes aproximaciones:

- 1) Se desprecian todos los efectos de borde
- 2) Se considera que \vec{H} y $\vec{B} // d\vec{l}$. La curva cerrada empleada en (8.35) sigue a las líneas de \vec{H} y \vec{B} .

$$3) \Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong BS$$

- 4) Entrehierro “estrecho” significa que el largo es mucho menor que el lado de la sección del circuito. En este caso no hay dispersión de las líneas de \vec{B} .

Las consideraciones 2) y 3) son razonables cuando la sección es pequeña (ver ejemplo 8.8.1).

Entonces el teorema de Ampere se escribe:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = fmm = NI = \int_{l_N} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{e1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{e2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{l_B} \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (8.36)$$

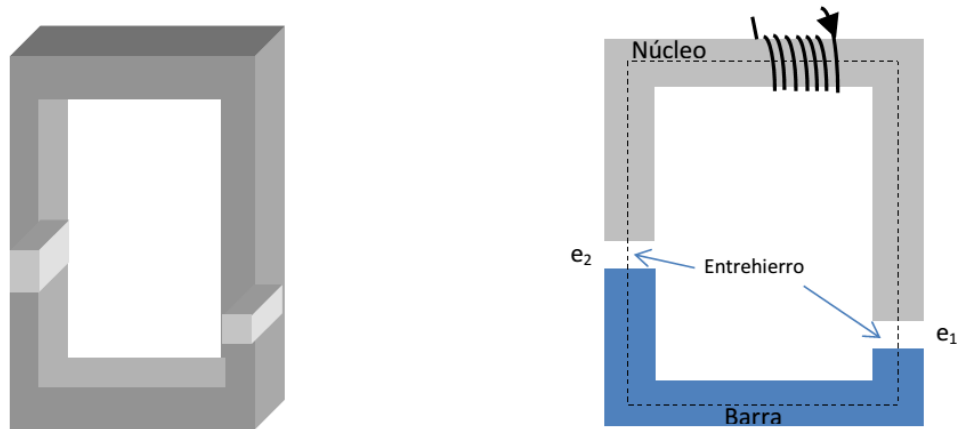


Figura 8.17 Ejemplo de circuito magnético

Usando las relaciones constitutivas:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = fmm = NI = \int_{l_N} \frac{\vec{B}_N}{\mu_N} \cdot d\vec{l} + \int_{e1} \frac{\vec{B}_{aire}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} + \int_{e2} \frac{\vec{B}_{aire}}{\mu_0} \cdot d\vec{l} + \int_{l_B} \frac{\vec{B}_B}{\mu_B} \cdot d\vec{l} \quad (8.37)$$

Como el flujo magnético es constante, podemos escribir

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = cte. \cong B_N S_N = B_{e1} S_{e1} = B_{e2} S_{e2} = B_B S_B \quad (8.38)$$

Luego:

$$fmm = NI = \Phi_m \left\{ \int_{l_N} \frac{1}{\mu_N S_N} dl + \int_{e1} \frac{1}{\mu_0 S_{e1}} dl + \int_{e2} \frac{1}{\mu_0 S_{e2}} dl + \int_{l_B} \frac{1}{\mu_B S_B} dl \right\} \quad (8.39.a)$$

Haciendo las integrales:

$$fmm = NI = \Phi_m \left\{ \frac{l_N}{\mu_N S_N} + \frac{e1}{\mu_0 S_{e1}} + \frac{e2}{\mu_0 S_{e2}} + \frac{l_B}{\mu_B S_B} \right\} \quad (8.39.b)$$

Las ecuaciones (8.39.a) y (8.39.b) permiten obtener el flujo magnético y luego se pueden obtener los campos usando (8.38) y las relaciones constitutivas. La ecuación (8.39.a) se puede escribir como:

$$fmm = NI = \Phi_m \mathfrak{R} \quad (8.40)$$

$$\text{con } \mathfrak{R} = \int \frac{1}{\mu S} dl = \frac{l}{\mu S} \quad (8.41)$$

\mathfrak{R} es la denominada reluctancia que depende de las características geométricas (largo del tramo y su sección) y de la permeabilidad μ del material.

La ecuación (8.40) es equivalente a la ley de Ohm de Corriente Continua, esto es:

$$fem = i.R$$

donde tenemos las siguientes analogías: la fem es análoga a la fmm , la corriente i al flujo Φ_m y la resistencia a la reluctancia.

8.8. Aplicaciones

8.8.1. Toroide grueso

¿Bajo qué condiciones un toroide se puede considerar como de sección delgada? En general se responde esta pregunta diciendo que el lado de la sección debe ser mucho menor que el radio medio del mismo. En esta sección vamos a responder esta pregunta con mayor precisión.

¿Por qué es importante saber si un toroide tiene sección delgada o no? Básicamente, en los casos en los que el toroide puede tomarse como delgado vamos a decir que el campo inducción magnética \vec{B} es uniforme en la sección. En otras palabras, vamos a aproximar el flujo del vector inducción \vec{B} como el valor del módulo de dicho vector por el área de la sección, esto es:

$$\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong BS \quad (8.42)$$

A continuación vamos a plantear un caso particular, para analizar en qué circunstancias el toroide puede ser tomado como de sección delgada. Sea un toroide tipo anillo de Rowland como el mostrado en la figura 8.10 de radio medio R_m , sección cuadrada de lado a , hecho con un material ferromagnético de permeabilidad “equivalente” μ y con N espiras arrolladas y distribuidas uniformemente por las que circula una corriente i .

El vector intensidad del campo magnético H lo obtenemos usando la ley de Ampere (8.16) generalizada en una curva de radio r con $R_m - a/2 < r < R_m + a/2$

$$H \cdot 2\pi \cdot r = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni \quad (8.43)$$

Y empleando la relación constitutiva, obtenemos el módulo del vector inducción magnética:

$$B(r) = \mu \frac{Ni}{2\pi r} \quad (8.44)$$

El flujo del vector inducción magnética lo obtenemos empleando:

$$\Phi_g = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_{R_m - a/2}^{R_m + a/2} \mu \frac{Ni}{2\pi r} \cdot dr dz = \mu a \frac{Ni}{2\pi} \ln\left(\frac{R_m + a/2}{R_m - a/2}\right) \quad (8.45)$$

Queremos saber bajo qué circunstancias la expresión (8.45) puede aproximarse por (8.42), para ello vemos cuanto es la diferencia relativa porcentual entre los flujos calculados por ambas expresiones. Llamamos “diferencia relativa porcentual” de flujos $\Delta\Phi_R$ a

$$\Delta\Phi_R = 100 \cdot \frac{\Phi_g - \Phi_m}{\Phi_m} \quad (8.46)$$

La figura 8.18 muestra cuál es error cometido por considerar al toroide grueso como si fuera delgado. Un posible criterio para decidir en qué situación un toroide puede ser tomado como delgado es decir que para una relación $R_m/a \geq 3$ el error cometido es menor al 1 % (este es un error más que aceptable sobre todo teniendo en cuenta las aproximaciones realizadas). En otras palabras, según este criterio, se puede considerar un toroide como delgado si su radio medio es al menos tres veces el lado de la sección a .

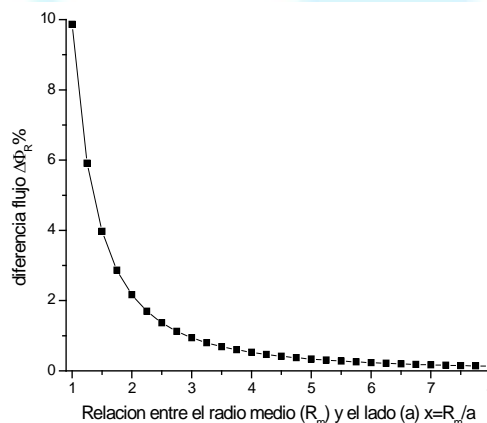


Figura 8.18 Diferencia de flujos en función de la relación radio medio del toroide sobre lado de la sección.

8.8.2. Toroide delgado con entrehierro estrecho

Usaremos las ecuaciones fundamentales (8.29) y (8.34) desarrolladas en el inciso 8.6 para resolver un problema simple donde se supone conocida la permeabilidad magnética “equivalente” del material.

Un toroide de radio medio R_m y de sección delgada cuadrada de lado a como el mostrado en la figura 8.19 con entrehierro estrecho de largo e ($e \ll a$), es alimentado por medio de un arrollamiento de N vueltas de cable por el que circula una corriente I_o . El toroide se encuentra construido con un material ferromagnético con permeabilidad magnética “equivalente” μ . Se desea determinar los campos \vec{B} y \vec{H} en el interior del toroide y en el entrehierro.

Las hipótesis de este problema son:

- El material magnético tiene una permeabilidad magnética “equivalente” μ , de valor conocido, o sea se asume como relación constitutiva la ecuación lineal (8.15).
- El toroide tiene sección delgada. En otras palabras, vamos a poder decir que en el interior del mismo los campos B_m y H_m serán uniformes a lo largo de la sección cuadrada (como se mostró en las secciones 8.7 y 8.8.1).
- El entrehierro es “estrecho”, esto significa que el largo e del mismo es mucho menor que el lado de la sección del toroide ($e \ll a$). De forma tal que las líneas de campo magnético \vec{B} no sufren una dispersión significativa al pasar por la región del entrehierro, y vamos a considerar que la sección donde el campo es no nulo, es aproximadamente la sección del toroide.

Como el toroide es de sección delgada y considerando que el flujo del campo \vec{B} debe ser constante (ecuación fundamental (8.34)) concluimos que los campos B_m y H_m son uniformes en todo en el interior del toroide en la zona donde se encuentra el material magnético. Llamamos B_0 y H_0 a los campos en el interior del entrehierro.

A continuación escribimos las ecuaciones fundamentales:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + H_0 \cdot e = N \cdot I_o \quad (8.47)$$

$$\Phi = \int_{S_m} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_m \cdot a^2 = B_0 \cdot a^2 = \int_{S_o} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (8.48)$$

En la ecuación (8.47) se usó para hacer la integral una curva C, circular de radio R_m . En la ecuación (8.48) se empleó que como el entrehierro es estrecho, se puede decir que las líneas no se dispersan y el área de integración es la misma que en el caso del material.

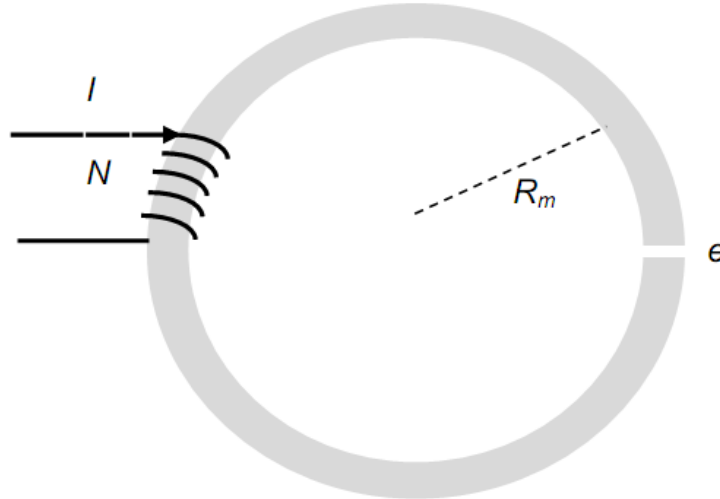


Figura 8. 19 Toroide de sección delgada con entrehierro estrecho.

Reemplazando las relaciones constitutivas del material magnético y del entrehierro

$$\vec{B}_m = \mu \vec{H}_m \quad (8.49.a)$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (8.49.b)$$

en la ecuación (8.47):

$$\frac{B_m}{\mu} 2\pi.R_m + \frac{B_0}{\mu} .e = N.I_o \quad (8.50)$$

Y podemos escribir (8.50) en función del flujo usando (8.48):

$$\Phi \left[\frac{2\pi.R_m}{\mu.a^2} + \frac{e}{\mu_0.a^2} \right] = N.I_o \quad (8.51)$$

La ecuación (8.51) permite obtener el flujo y luego, empleando (8.48) y las relaciones constitutivas (8.49), podemos obtener los campos \vec{B} y \vec{H} en el interior del toroide y en el entrehierro.

8.8.3. Circuito magnético delgado con entrehierro

Generalizaremos el ejemplo del ejercicio anterior para un circuito magnético de diferentes secciones delgadas formado por distintos materiales ferromagnéticos y con

entrehierro estrecho. Seguiremos usando la hipótesis de la relación constitutiva lineal para los materiales ferromagnéticos (ecuación 8.15).

Sea el circuito magnético de sección delgada mostrado en la figura 8.20 con entrehierro estrecho formado por dos materiales de permeabilidades magnéticas equivalentes relativas μ_{r1} , μ_{r2} , secciones diferentes (a^2 y $a \cdot b$) y alimentado por dos arrollamientos distintos de N_1 y N_2 vueltas por los que circulan corrientes I_1 e I_2 . Las hipótesis geométricas son las siguientes:

- a) Sección delgada: esto es las dimensiones a y b son mucho menores que d_1 y d_2 .
- b) Entrehierro estrecho: esto es el largo e es mucho menor que b y a .

Como fue expresado en la sección 8.6, las expresiones generales que permiten plantear este tipo de ejercicios son las ecuaciones (8.29) y (8.34), esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_r \quad (\text{Ley de Ampere generalizada}) \quad (8.52)$$

$$\Phi_m = \text{constante} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong BS \quad (8.53)$$

La última igualdad en la ec. (8.53), tal como expresamos en la sección 8.8.1, la podemos hacer porque el circuito es considerado de sección delgada.

Analizando la ecuación (8.53), observamos que si el material y/o la sección del circuito no cambian, los campos \vec{B} y \vec{H} no cambian. En otras palabras, esto es, los campos \vec{B} y \vec{H} cambian, si cambian el material o la sección. Entonces el procedimiento que se utiliza para este tipo de ejercicios es nombrar los campos \vec{B} y \vec{H} de la misma manera en todo el tramo donde el material y la sección son iguales.

Así en el circuito de la figura, tendremos los campos \vec{B}_1 y \vec{H}_1 en el tramo horizontal de abajo del circuito magnético, los campos \vec{B}_2 y \vec{H}_2 en los tramos izquierdo y horizontal de arriba, los campos \vec{B}_3 y \vec{H}_3 en el tramo derecho y los campos \vec{B}_0 y \vec{H}_0 en el entrehierro. Todos estos campos suelen ser las incógnitas del problema y están vinculados por relaciones constitutivas lineales del tipo (8.15), esto es:

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_{r1} \vec{H}_1 \quad (8.54.a)$$

$$\vec{B}_2 = \mu_0 \mu_{r2} \vec{H}_2 \quad (8.54.b)$$

$$\vec{B}_3 = \mu_0 \mu_{r2} \vec{H}_3 \quad (8.54.c)$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (8.54.d)$$

Generalizando lo realizado en la sección anterior, se utiliza la ley de Ampere generalizada sobre el circuito cerrado dado por la línea de puntos, como se muestra en la figura, eligiendo arbitrariamente el sentido de las agujas del reloj. En este caso, con este sentido de circulación, la corriente I_2 , que es entrante al plano del papel, tiene signo positivo, mientras I_1 que es negativa. Esto es:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 \cdot d_2 + H_2 \cdot (d_1 + d_2) + H_3 \cdot (d_1 - e) + H_o \cdot e = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.55)$$

La ecuación (8.53) la evaluamos en este ejercicio de la siguiente manera:

$$\Phi_m = \text{constante} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \cong B_1 \cdot a^2 = B_2 \cdot a^2 = B_3 \cdot a \cdot b = B_o \cdot a \cdot b \quad (8.56)$$

La última igualdad es válida si el entrehierro es estrecho.

Las expresiones (8.54), (8.55) y (8.56) forman un sistema de ecuaciones donde los campos \vec{B} y \vec{H} son las incógnitas. Para resolverlo, escribimos en (8.55), usando (8.54), los campos H en función de B :

$$\frac{B_1 \cdot d_2}{\mu_0 \mu_{r1}} + \frac{B_2 \cdot (d_1 + d_2)}{\mu_0 \mu_{r2}} + \frac{B_3 \cdot (d_1 - e)}{\mu_0 \mu_{r2}} + \frac{B_o \cdot e}{\mu_0} = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.57)$$

Y ahora usando (8.56), escribimos (8.57) en función del flujo, que es el mismo en todo el circuito magnético:

$$\Phi_m \left[\frac{d_2}{\mu_0 \mu_{r1} \cdot a^2} + \frac{(d_1 + d_2)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a^2} + \frac{(d_1 - e)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a \cdot b} + \frac{e}{\mu_0 \cdot a \cdot b} \right] = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.58)$$

La ecuación (8.58) permite obtener el flujo magnético, y luego usando las expresiones (8.56) y (8.54) se obtienen los campos \vec{B} y \vec{H} para los distintos tramos del circuito magnético.

Es importante destacar que (8.58) es el mismo tipo de expresión que (8.40) donde:

a) La “fuerza magnetomotriz” fmm es

$$fmm = N_2 \cdot I_2 - N_1 \cdot I_1 \quad (8.59)$$

b) La reluctancia total es la suma de la reluctancia de los cuatro elementos “conectados en serie”:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \mathfrak{R}_o = \left[\frac{d_2}{\mu_0 \mu_{r1} \cdot a^2} + \frac{(d_1 + d_2)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a^2} + \frac{(d_1 - e)}{\mu_0 \mu_{r2} \cdot a \cdot b} + \frac{e}{\mu_0 \cdot a \cdot b} \right] \quad (8.60)$$

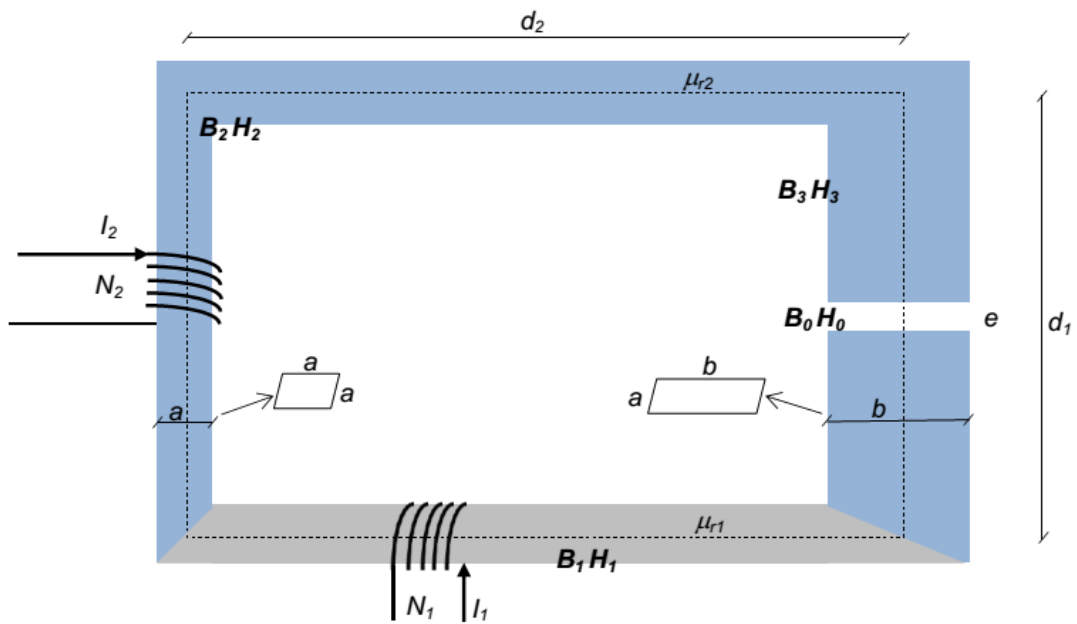


Figura 8.20 Circuito magnético de sección delgada (las dimensiones a y b son mucho menores que d_1 y d_2) con entrehierro estrecho (el largo e es mucho menor que b y a) formado por dos materiales de permeabilidades magnéticas relativas μ_{r1} y μ_{r2} , secciones diferentes (a^2 y $a \cdot b$) alimentado por dos arrollamientos diferentes. Se utiliza la ley de Ampere generalizada sobre el circuito cerrado dado por la línea de puntos.

8.8.4. Toroide delgado con entrehierro estrecho y material magnético con ciclo de histéresis.

¿Cómo se resuelvan los circuitos magnéticos cuando la relación constitutiva lineal (8.15) no se puede emplear y tenemos como información del material el ciclo de histéresis típico como el mostrado en la figura 8.21. En este caso, como veremos, se puede emplear un método gráfico para resolverlo.

La figura 8.21 nos muestra un ciclo de histéresis con sus características típicas, esto es: la curva de primera imanación los campos de saturación B_S y H_S , $\vec{B}_S = \mu_0 \cdot (\vec{H}_S + \vec{M}_S)$, el campo coercitivo H_C y el campo de remanencia B_R .

Consideremos un problema simple como el desarrollado en la sección 8.8.2, esto es, sea un toroide de radio medio R_m y de sección delgada cuadrada de lado a como el mostrado en la figura 8.20 con entrehierro estrecho de largo e ($e \ll a$), que es alimentado por medio de un arrollamiento de N vueltas de cable por el que circula una corriente I_0 . El toroide se encuentra construido con un material ferromagnético del que no se conoce en qué zona se está trabajando y, por lo tanto, no se le puede asignar una permeabilidad equivalente μ (y esta es la diferencia con lo planteado en la sección 8.8.2), pero si es conocido el ciclo de histéresis de la

figura 8.21 .Se desea determinar los campos \vec{B} y \vec{H} en el interior del toroide y en el entrehierro.

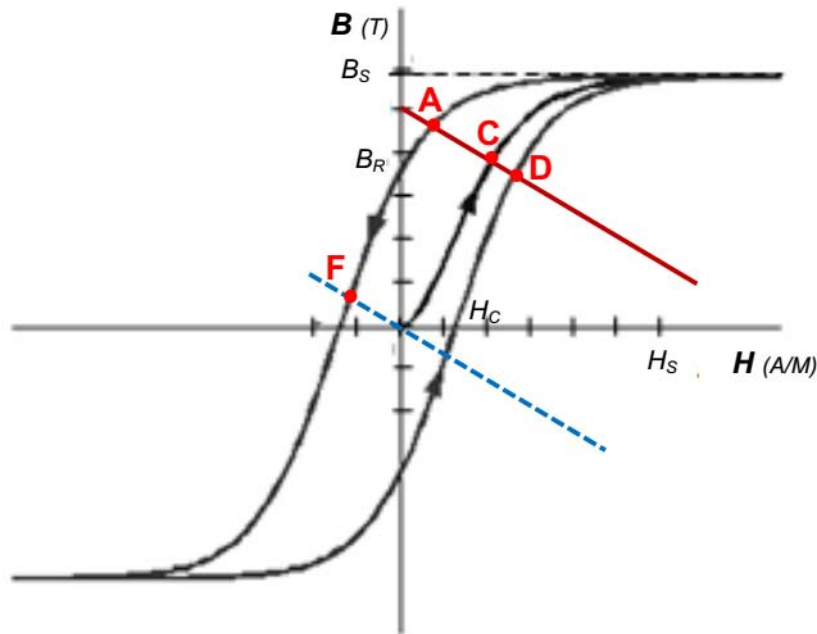


Figura 8.21 Curva de histéresis B vs H de un material ferromagnético. En rojo se representa la recta $B_m = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_o}{e} - \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e} H_m$ con sus posibles soluciones comprendidas entre los puntos A y D, mientras que en azul se representa la recta $B_m = -\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e} H_m$ correspondiente al caso $I_o=0$.

Es claro que el desarrollo es similar a lo planteado en la sección 8.8.2, esto es: llamamos B_m y H_m a los campos en el interior del material que serán uniformes en todo en el interior del toroide (como se mostró en las secciones 8.7 y 8.8.2) y además llamamos B_0 y H_0 a los campos en el interior del entrehierro.

Las ecuaciones fundamentales son:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + H_0 \cdot e = N \cdot I_o \quad (8.61)$$

$$\Phi = \int_{S_m} \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_m \cdot a^2 = B_0 \cdot a^2 = \int_{S_o} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{constante} \quad (8.62)$$

En la ecuación (8.61) se usó para hacer la integral una curva C, circular de radio R_m y en la ecuación (8.62) se empleó que el entrehierro es estrecho. Además la relación constitutiva del entrehierro es:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (8.63)$$

Para resolver este problema usaremos las expresiones (8.61), (8.62) y (8.63) para obtener una única ecuación donde tengamos B_m y H_m como incógnitas. Esto es, usando (8.62) obtenemos $B_m = B_0$ y reemplazando H_0 en (8.61) por la expresión (8.63):

$$H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + \frac{B_m \cdot e}{\mu_0} = N \cdot I_o \quad (8.64)$$

Despejando B_m :

$$B_m = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_o}{e} - \frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e} H_m \quad (8.65)$$

La ecuación (8.65) y el ciclo de histéresis de la figura 8.21 forman un sistema “particular” de dos relaciones con dos incógnitas, una de ellas es un gráfico, por ello tendremos una resolución gráfica de este problema. La ecuación (8.65) representa una recta en un gráfico B_m vs. H_m donde $\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I_o}{e}$ es la ordenada al origen y la pendiente de la recta es $-\frac{\mu_0 \cdot 2\pi \cdot R_m}{e}$. En la figura 8.21 vemos en rojo la recta que representa la ecuación (8.65). La recta corta al ciclo de histéresis en tres puntos, la solución para los campos dependerá de la historia previa del material. Por ejemplo el punto C representa la solución para un material que no está previamente magnetizado mientras que el punto A representa la solución para el caso en el que el material haya alcanzado previamente la saturación. Es importante destacar que todos los puntos comprendidos entre los puntos A y D son posibles soluciones del problema, que dependerán de la historia previa del material ferromagnético. También es graficado en una recta azul el caso particular cuando la corriente de alimentación I_o es nula.

Análisis de los resultados:

Las soluciones representadas con los puntos A y F son dos soluciones emblemáticas de los circuitos magnéticos que corresponden a dos casos típicos correspondientes al primer y segundo cuadrante del gráfico B vs. H respectivamente.

El primer caso (solución A, primer cuadrante) corresponde a un circuito magnético (que es alimentado por una corriente I_o) cuyo material fue saturado previamente. En esta situación, los campos en el material magnético \vec{B}_m y \vec{H}_m , y el vector magnetización \vec{M} ,

tendrán la misma dirección y sentido, sentido horario. En la figura 8.22 se muestran las líneas de \vec{H} en el interior del material y en el entrehierro. Vemos que si:

$$B_m = B_0 \text{ o sea } \mu_0 \cdot (H_m + M) = B_m = B_0 = \mu_0 \cdot H_0, \text{ con } H_m \ll M \text{ entonces}$$

$$H_m \ll H_0 \tag{8.66}$$

También notamos que como $\text{div}(\vec{B}) = 0$ y $\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{M})$ entonces:

$$\text{div}(\vec{H}) = -\text{div}(\vec{M}) \tag{8.67}$$

La ecuación (8.67) nos muestra que las líneas de \vec{H} nacen (mueren) donde las de \vec{M} mueren (nacen). En el polo de arriba de la figura 8.22 mueren líneas de \vec{M} , esto es el polo norte del electroimán y es donde nacen las líneas de \vec{H} . Idéntico razonamiento se puede hacer en el polo sur.

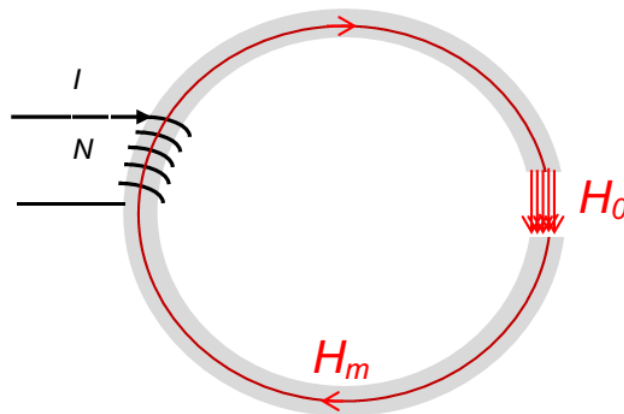


Figura 8.22 Líneas de \vec{H} para una solución en el primer cuadrante (del tipo del punto A de la figura 8.20) correspondiente a un electroimán. Vemos que $H_m \ll H_0$.

El segundo caso (solución F, segundo cuadrante) corresponde a un circuito magnético que es alimentado por una corriente I_0 que decrece hasta hacerse nula (cuyo material fue saturado previamente). En esta situación, el campo \vec{B}_m en el material magnético y el vector magnetización \vec{M} , tendrán la misma dirección y sentido, sentido horario. Sin embargo, como la solución se encuentra en el segundo cuadrante, el campo \vec{H}_m debe invertir su sentido. En la figura 8.23 se muestran las líneas de \vec{H} en el interior del material y en el entrehierro. Vemos que se verifica (8.66) y además usando la ley de Ampere generalizada con corriente nula:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m \cdot 2\pi \cdot R_m + H_0 \cdot e = 0 \tag{8.68}$$

La ecuación (8.68) muestra también que \vec{H}_m y \vec{H}_0 deben tener sentido contrario, para que el resultado de la circulación sea nulo. Pero la ecuación (8.63) (relación constitutiva) nos muestra que \vec{H}_0 no cambia su sentido, o sea, tiene el sentido horario que es el del campo \vec{B}_0 . Por lo tanto \vec{H}_m debe cambiar su sentido.

También notamos la validez de la ecuación (8.67) y por lo tanto las líneas de \vec{H} nacen (mueren) donde las de \vec{M} mueren (nacen). En el polo de arriba de la figura 8.23 mueren líneas de \vec{M} , esto es el polo norte del imán y es donde nacen las líneas de \vec{H} . Idéntico razonamiento se puede hacer en el polo sur.

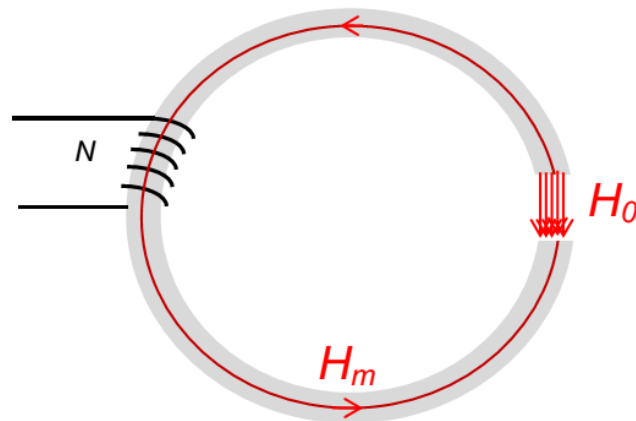


Figura 8.23 Líneas de \vec{H} para una solución en el segundo cuadrante (del tipo del punto F de la figura 8.21, correspondiente a un imán). En este caso \vec{H}_m invierte su sentido. Vemos que $H_m \ll H_0$. En el polo norte del imán nacen líneas de \vec{H} y en el polo sur mueren.

Como cierre de este capítulo, podemos decir que se ha mostrado la teoría necesaria y los ejercicios más representativos del tema de materiales magnéticos.

Ahora, a practicar.....!!!!

Bibliografía consultada:

- Fernández, Juan Carlos, “Ingeniería electromagnética I - Modelos estáticos circuitales”, EUDEBA (2013).
- Feynman, R., Leighton, R.B. y Sands, M., “Física Volumen II: Electromagnetismo y Materia”, Addison-Wesley Iberoamericana (1987).
- Griffiths, D., “Introduction to Electrodynamics”, Prentice Hall (1999).
- Mc Kelvey, J.P. y Grotch, J., "Física para Ciencias e Ingeniería", Tomo II (Electromagnetismo), Ed. Harla, México (1981).
- Rodríguez Trelles, Félix, “Temas de Electricidad y Magnetismo”, EUDEBA (1984).
- Sears, Zemansky, Young y Freedman, “Física Universitaria Vol II”, Pearson (1999).